多倍長計算を用いた精度指定可能な制御系設計パッケージ

A Numerical Computation Package for System Control with a Priori Guaranteed Precision using Multiple-Precision Arithmetic

九州工業大学 ○ 中島 大雅，古賀 雅伸, 矢野 健太郎
Hiromasa Nakashima and Masanobu Koga
Kyusyu Institute of technology

Abstract This study proposes an algorithm to obtain the number of the digits for multiple-precision arithmetic which makes it possible to get the solution of specified accuracy. We implemented numerical computation package based on the proposed algorithm and verify it by applying the package to the system control design such as LQ control problem. .

1 はじめに

一般に数値計算では倍精度の浮動小数点型が用いられる。数学的に厳密な式が与えられたとしても，丸めなどの誤差が混入するため，計算機上では正確な結果を得られるとは限らない。また、精度桁を任意に設定できる多倍長精度計算を用いれば丸め誤差を低減できるが、誤差の大きさがどの位あるのかは、わからない。一方精度保証計算を用いれば、誤差の大きさを見積もることができる。しかし精度保証計算は、事後的に誤差を保証するものであり、事前に保証することはできない。

表 1: 計算方法と誤差

計算方法	誤差の大きさ	誤差保証
単・倍精度計算	大	不可
精度保証倍精度計算	大	可 (事後保証)
多倍長計算	小	不可
精度保証多倍長計算	小	可 (事後保証)
???	小	可 (事前保証)

本研究では、指定された精度で計算結果を得るために必要な多倍長計算の精度桁を求めるアルゴリズムを提案し、数値計算パッケージとして実装する．そして，精度指定可能な数値計算を、LQ 最適制御問題などの制御系設計に適用し，その有効性を検証する．

2 多倍長計算

本研究で開発した多倍長精度浮動小数点演算を行なうためのパッケージ MPFloat(Multiple Precision Floating-PointNumber)[1] で、動的に精度桁を変更できるように改良した．MPFloat が利用する ExFlib[2] では，同時に複数の精度桁の計算を行うことができないので、桁数の異なる Exflib のライブラリを準備し，MPFloat から適当な桁数のライブラリを利用したり，桁数変換を行うことで，精度桁が異なる値の計算を可能にした．

3 精度指定可能な数値計算

3.1 精度指定可能な数値計算パッケージ (GAP) の概要

精度指定可能な数値計算をサポートするパッケージ GAP(Guranteed a Priori Precision) は，動的に精度桁を変更できる多倍長計算パッケージ MPFloat と，精度保証付き数値計算パッケージ CGA[3] を組み合わせることで実現されている．

3.2 精度指定計算パッケージの構造

CGA には精度保証付き計算を行うための Verifie インターフェースがある。精度保証付き計算を行うクラスは，Verifier インターフェースを実装している。GAP には Verifier インスタンスを生成するファクトリーメソッドを持った、Factory クラスを持つ。図 1 にこれらの関係を示す。

指定された精度で計算結果を得る Guarantor クラスは、前述の 2 つのインターフェースに基づいて定義されているので精度保証が可能な任意の計算に対応できる。

3.3 指定精度の実現

GAP は CGA で計算された解が，指定された精度を保証するかを判定し，満たしていない場合、適切な桁数を増やして、再度計算するという動作を繰り返す。

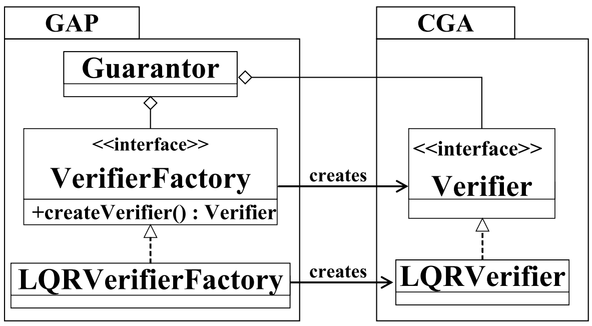

図 1: 精度指定計算のためのクラス図

精度を指定する方法として、絶対誤差指定と精度桁指定が選択可能である。以下の式に基づいて、精度保証付き計算に用いる桁数 (p_k) を更新する。

- **精度桁指定** (p^***:(2 進数)**)

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + \Delta p_k \\
p_0 &= \lceil p^*/N \rceil \times N \\
\Delta p_k &= \lceil (p^* - \hat{p}_k) \times a/N \rceil \times N \\
\hat{p}_k &= \log_2 |c_k/r_k|
\end{aligned}
$$

- **絶対誤差指定** (e^***:(10 進数)**)

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + \Delta p_k \\
p_0 &= N \\
\Delta p_k &= \lceil (p^* - \hat{p}_k) \times a/N \rceil \times N \\
\hat{p}_k &= \log_2 |c_k/r_k| \\
p_k^* &= \log_2 |c_k/e^*|
\end{aligned}
$$

ただし、p_k は使用桁数 (2 進数)、$\hat{p}_k$ は保証桁数 (2 進数),N は増加するビット長の単位 (64)、c_r は中心,r_k は半径,a はゲインである。また、$\lceil \quad \rceil$ は上向きに丸めた整数を求める関数である。多くの場合 2 回目の演算で指定された精度が達成される。

4　性能評価

リカッチ方程式 (1) の解を精度指定で求め性能評価を行う。

$$Q + A^T P + PA - PGP = 0 \tag{1}$$

システムのパラメータとして以下の値 [4] を用いる。

$$
\begin{gathered}
V = I - \frac{2}{3} v v^T,\ v^T = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
A_0 = \varepsilon \,\mathrm{diag}\,(1,2,3)\,,\ Q_0 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\varepsilon}, 1, \varepsilon\right) \\
A = V A_0 V,\ G = \frac{1}{\varepsilon} I_3,\ Q = V Q_0 V
\end{gathered}
$$

4.1　精度性能評価

$\varepsilon = 10^{19}$ とし、精度保証付き多倍長計算 (38 桁)，絶対誤差指定 (1.0×10^{-16})、精度桁指定 (20 桁) によって精度評価する。

・精度保証付き多倍長計算

『非正則: 計算結果は不正確の可能性があります。』という警告が表示され、正しく精度保証を行うことができなかった.

・絶対誤差指定

```
===  P 中心  (    3   x    3)  NumericalMatrix  ===
      [  (  1)  ]    [  (  2)  ]    [  (  3)  ]
(  1)   4.67e+38       1.33e+38      -3.70e-2
(  2)   1.33e+38       4.00e+38      -1.33e+38
(  3)  -3.70e-2       -1.33e+38       3.33e+38
===  P 半径  (    3   x    3)  NumericalMatrix  ===
      [  (  1)  ]    [  (  2)  ]    [  (  3)  ]
(  1)   3.25e-18       3.01e-18       2.88e-18
(  2)   3.44e-18       3.42e-18       3.10e-18
(  3)   2.96e-18       2.78e-18       2.76e-18
```

P の全ての成分の区間の半径は、指定した絶対誤差 (1.0×10^{-16}) よりも小さくなっていることが確認できる。

・精度桁指定

```
===  P 中心  (    3   x    3)  NumericalMatrix  ===
      [  (  1)  ]    [  (  2)  ]    [  (  3)  ]
(  1)   4.67e+38       1.33e+38      -3.70e-2
(  2)   1.33e+38       4.00e+38      -1.33e+38
(  3)  -3.70e-2       -1.33e+38       3.33e+38
===  P 半径  (    3   x    3)  NumericalMatrix  ===
      [  (  1)  ]    [  (  2)  ]    [  (  3)  ]
(  1)   1.62e-37       1.48e-37       1.40e-37
(  2)   1.73e-37       1.68e-37       1.48e-37
(  3)   1.54e-37       1.44e-37       1.44e-37
```

P の全ての成分精度の桁数は指定した精度桁 (20 桁) より大きくなっていることが確認できる。

5　まとめ

本研究では、指定された精度で計算結果を得るために必要な多倍長計算の精度桁を求めるアルゴリズムを提案し、数値計算パッケージとして実装した．そして，精度指定可能な数値計算を、LQ 最適制御問題などの制御系設計に適用し，その有効性を検証した.

今後は，並列処理機能を用いて速度向上を図りたい.

参考文献

[1] 山村英介．多倍長精度計算を用いた制御系設計パッケージ．卒業論文, 2007.

[2] 藤原宏志． Multiple-Precision Arithmetic Library exflib(C++), 2006.

[3] 矢野健太郎, 古賀雅伸. LQ 制御問題の精度保証付き数値計算. 計測自動制御学会論文集 第 43 巻 第 3 号, 2006.

[4] P. Benner, A. Laub, and V. Mehrmann. A Collection of Benchmark Examples for the Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations I: Continious-Time Case, 1995. Tech. Report SPC 95 22, Fak. f. Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, 09107 Chemnitz, FRG.